

第2讲 一元二次方程的判别式和根系关系练习

一、一元二次方程的判别式

练习

1. 2020~2021学年10月天津和平区天津市第五十五中学初三上学期月考第1题3分 ★

已知一元二次方程 $x^2 - 6x + 9 = 0$ ，它的根的情况是（ ）。

- A. 两个不相等的实数根
- B. 一个实数根
- C. 无实根
- D. 两个相等的实数根

【答案】 D

【解析】 $\because \Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$ ，

$\therefore$ 方程有两个相等的实数根。

【标注】 【知识点】 一元二次方程根的判别式

2. 2019~2020学年江苏南京鼓楼区南京市第二十九中学初中部初三下学期开学考试第3题2分 ★

一元二次方程 $2x^2 + 3x + 1 = 0$ 的根的情况是（ ）。

- A. 有两个相等的实数根
- B. 有两个不相等的实数根
- C. 没有实数根
- D. 无法确定

【答案】 B

【解析】 $\because$ 在方程 $2x^2 + 3x + 1 = 0$ 中， $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0$ ，

$\therefore$ 方程 $2x^2 + 3x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根。

【标注】 【知识点】 一元二次方程根的判别式

3. 2019~2020学年广东惠州博罗县初三上学期期中第3题3分 ★

下列所给方程中，没有实数根的是（ ）。

- A. $x^2 + x = 0$
- B. $5x^2 - 4x - 1 = 0$
- C. $3x^2 - 4x + 1 = 0$
- D. $4x^2 - 5x + 2 = 0$

【答案】 D

【解析】 在 D 选项中 $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 4 \times 2 = -7 < 0$ ，方程无解。

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

练习

4. 2020~2021学年天津红桥区初三上学期期末第15题3分 ★★

若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2kx + k^2 - k + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则实数 k 的取值范围是 _____ .

【答案】 $k > 1$

【解析】 ∵ 原方程有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-2k)^2 - 4(k^2 - k + 1) = 4k - 4 > 0 ,$$

解得 $k > 1$;

故答案为： $k > 1$.

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

5. 2019~2020学年湖南长沙开福区青竹湖湘一外国语学校初二下学期期中第12题3分 ★★

若关于 x 的方程 $(k-2)x^2 + 2x - 1 = 0$ 有实数根，则实数 k 的取值范围是 () .

- A. $k \geq 1$ B. $k > 1$ 且 $k \neq 2$ C. $k \leq 1$ D. $k \geq 1$ 且 $k \neq 2$

【答案】 A

【解析】 当该方程为一元二次方程时，有实数根，

$$\begin{cases} k-2 \neq 0 \\ \Delta = 2^2 - 4(k-2) \cdot (-1) \geq 0 \end{cases} ,$$

$\therefore k \geq 1$ 且 $k \neq 2$,

当该方程为一元一次方程时，必有实数根，

则 $k-2=0$, $k=2$,

综上， k 的取值范围为 $k \geq 1$.

故选 A .

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

6. 2017~2018学年广东广州天河区广州市天河外国语学校初三下学期开学考试第8题3分 ★★

若关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 + 2x - 2 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是 () .

- A. $k > \frac{1}{2}$ B. $k \geq \frac{1}{2}$ C. $k > \frac{1}{2}$ 且 $k \neq 1$ D. $k \geq \frac{1}{2}$ 且 $k \neq 1$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 + 2x - 2 = 0$ 有不相等实数根，

$$\therefore \Delta = 2^2 - 4(k-1) \times (-2) > 0, \text{ 且 } k-1 \neq 0,$$

$$\text{解得 } k > \frac{1}{2}, \text{ 且 } k \neq 1.$$

故选 C.

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

7. 2019~2020学年10月天津和平区天津市双菱中学初三上学期月考第4题 ★★

若关于 x 的一元二次方程 $(x-2)(x-3) = m$ 有实数根 x_1, x_2 ，且 $x_1 \neq x_2$ ，则 m 的取值范围是 () .

A. $m > -\frac{1}{4}$

B. $m < -\frac{1}{4}$

C. $m \geq -\frac{1}{4}$

D. $m \leq -\frac{1}{4}$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 一元二次方程 $(x-2)(x-3) = m$ 有实数根 x_1, x_2 ，且 $x_1 \neq x_2$ ，

$$\therefore \Delta > 0,$$

$$x^2 - 5x + 6 - m = 0,$$

$$\Delta = 25 - 4(6 - m)$$

$$= 1 + 4m > 0,$$

$$\therefore m > -\frac{1}{4}.$$

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

8. 2018~2019学年广西梧州苍梧县苍梧实验中学初二下学期期中第11题3分 ★★

若一元二次方程 $(k-1)x^2 - \sqrt{1-k}x + \frac{1}{4} = 0$ 有两个实数根，则 k 的取值范围是 () .

A. $k \geq 1$

B. $k \leq 1$

C. $k > 1$

D. $k < 1$

【答案】 D

【解析】当 $k = 1$ 时，原方程不成立，故 $k \neq 1$ ，

$$\therefore \text{方程 } (k-1)x^2 - \sqrt{1-k}x + \frac{1}{4} = 0 \text{ 为一元二次方程，}$$

又此方程有两个实数根，

$$\therefore b^2 - 4ac = \left(-\sqrt{1-k}\right)^2 - 4 \times (k-1) \times \frac{1}{4}$$

$$= 1 - k - (k-1)$$

$$= 2 - 2k \geq 0,$$

$$\therefore k \leq 1, 1 - k > 0,$$

综上： $k < 1$ ，

∴选 D.

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

9. 2019~2020学年山东烟台芝罘区山东省烟台第二中学北校区初三下学期期中第9题4分 ★★

关于 x 的一元二次方程 $x^2 - \sqrt{m+3}x + m = 0$ 有两个实数根，则 m 的取值范围是 () .

- A. $m \leq 1$ B. $m < 1$ C. $-3 \leq m \leq 1$ D. $-3 < m < 1$

【答案】 C

【解析】 根据题意： $\Delta = (-\sqrt{m+3})^2 - 4 \times 1 \times m \geq 0$ ， $m+3-4m \geq 0$ ，

$$3m \leq 3,$$

$$m \leq 1,$$

$$\text{同时：} m+3 \geq 0,$$

$$m \geq -3,$$

$$\text{故 } -3 \leq m \leq 1,$$

故选 C.

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

10. 2018~2019学年3月浙江杭州余杭区余杭树兰实验学校初二下学期月考第10题3分 ★★

有两个一元二次方程 $M: ax^2 + bx + c = 0$ ， $N: cx^2 + bx + a = 0$ ，其中 $ac \neq 0$ ， $a \neq c$ ，下列四个结论中正确的个数有 () .

- ①如果方程 M 有两个相等的实数根，那么方程 N 没有实数根
②如果方程 M 的两根符号相同，则方程 N 的两根符号也相同
③如果 5 是方程 M 的一个根，那么 5 也是方程 N 的一个根
④如果方程 M 和方程 N 有一个相同的根，那么这个根必是 $x = 1$

- A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

【答案】 D

【解析】 ①、如果方程 M 有两个相等的实数根，

那么 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，所以方程 N 也有两个相等的实数根，

结论错误，不符合题意；

②、如果方程 M 的两根符号相同，那么 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ ， $\frac{c}{a} > 0$ ，

所以 a 与 c 符号相同， $\frac{a}{c} > 0$ ，

所以方程 N 的两根符号也相同，结论正确，符合题意；

③、如果 5 是方程 M 的一个根，那么 $25a + 5b + c = 0$ ，

两边同时乘以 25 , 得 $25c + 125b + 625a = 0$,

所以 5 不是方程 N 的一个根 , 结论错误 , 不符合题意 ;

④、如果方程 M 和方程 N 有一个相同的根 ,

那么 $ax^2 + bx + c = cx^2 + bx + a$, $(a - c)x^2 = a - c$,

由 $a \neq c$, 得 $x^2 = 1$, $x = \pm 1$, 结论错误 , 不符合题意 .

故选 D .

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

练习

11. 2020年江苏扬州宝应县初三中考一模第21题8分 ★★★

关于 x 的方程 $x^2 - 2x + 2m - 1 = 0$ 有实数根 , 且 m 为正整数 , 求 m 的值及此时方程的根 .

【答案】 $m = 1$, $x_1 = x_2 = 1$.

【解析】 $a = 1$, $b = -2$, $c = 2m - 1$,

由题意知 $\Delta = b^2 - 4ac = 8 - 8m \geq 0$,

$\therefore m \leq 1$,

$\because m$ 为正整数 ,

$\therefore m = 1$,

$\therefore$ 方程为 $x^2 - 2x + 1 = 0$,

$\therefore x_1 = x_2 = 1$.

故答案为 : $m = 1$, $x_1 = x_2 = 1$.

【标注】【知识点】配方法求一元二次方程的根

12. 2020~2021学年10月天津南开区天津市第五十中学初三上学期月考第22题 ★★★

已知关于 x 的方程 $x^2 + ax + a - 2 = 0$.

(1) 求证 : 不论 a 取何实数 , 该方程都有两个不相等的实数根 .

(2) 若该方程的一个根为 1 , 求 a 的值及该方程的另一根 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $a = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{3}{2}$.

【解析】 (1) $\because \Delta = a^2 - 4(a - 2)$

$$= a^2 - 4a + 8$$

$$= a^2 - 4a + 4 + 4$$

$$= (a-2)^2 + 4 > 0,$$

∴不论 a 取何实数，该方程都有两个不相等的实数根；

(2) 将 $x=1$ 代入方程 $x^2 + ax + a - 2 = 0$,

$$\text{得: } 1 + a + a - 2 = 0, \text{ 解得 } a = \frac{1}{2};$$

$$\text{方程为 } x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0, \text{ 即 } 2x^2 + x - 3 = 0,$$

设另一根为 x_1 , 则

$$1 \cdot x_1 = -\frac{3}{2},$$

$$\text{解得 } x_1 = -\frac{3}{2}.$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

13. 2020~2021学年天津武清区英华国际中学初三上学期期中第20题8分 ★★

已知，关于 x 的方程 $x^2 + 2(2-k)x + 3 - 6k = 0$.

(1) 若 $x=1$ 是方程的一个根，求 k 的值及方程的另一根.

(2) 若 k 为任意实数，判断此时方程的根情况.

【答案】 (1) $k=1$ ，方程的另一根为 -3 .

(2) 无论 k 取什么实数值，此方程总有两个实数根.

【解析】 (1) 把 $x=1$ 代入方程有： $1 + 2(2-k) + 3 - 6k = 0$,

$$\text{解得 } k = 1.$$

$$\text{故方程为 } x^2 + 2x - 3 = 0,$$

设方程的另一个根是 x_2 ,

$$\text{则: } 1 \cdot x_2 = -3,$$

$$\text{解得 } x_2 = -3.$$

故 $k=1$ ，方程的另一根为 -3 .

(2) ∵关于 x 的方程 $x^2 + 2(2-k)x + 3 - 6k = 0$ 中，

$$\Delta = 4(2-k)^2 - 4(3-6k) = 4(k+1)^2 \geq 0,$$

∴无论 k 取什么实数值，此方程总有两个实数根.

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

14. 2017~2018学年10月江苏南京秦淮区南京市第一中学初中部初三上学期月考第24题6分 ★★★

已知关于 x 的方程 $m^2x^2 + (2m-1)x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 .

(1) 求 m 的取值范围.

(2) 是否存在实数 m ，使方程的两个实数根互为相反数？如果存在，求出 m 的值；如果不存在，说明理由.

【答案】 (1) $m < \frac{1}{4}$ 且 $m \neq 0$.

(2) 不存在, 证明见解析.

【解析】 (1) ①当 $m^2 = 0$, 即 $m = 0$ 时, 方程为 $-x + 1 = 0$, 无两个不相等实数根, 不符合条件;

②当 $m^2 \neq 0$, 即 $m \neq 0$ 时, 方程为一元二次方程,

$$b^2 - 4ac = (2m - 1)^2 - 4m^2 > 0,$$

解得: $m < \frac{1}{4}$, 综合①②可得 $m < \frac{1}{4}$ 且 $m \neq 0$.

(2) 不存在, 如果存在 x_1, x_2 互为相反数,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{2m-1}{m^2} = 0,$$

解得: $m = \frac{1}{2}$,

由(1)中结果知, 当 $m = \frac{1}{2}$ 时, $\Delta < 0$, 方程无实数根,

$\therefore$ 不存在 m 使方程的两实数根互为相反数.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

练习

15.

2020~2021学年河南郑州中原区郑州市中原一中实验分校(桐柏一中)初三上学期开学考试第14题3分

★★

已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边的长, 且关于 x 的方程 $x^2 + 2(a-b)x - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 $\triangle ABC$ 是 _____ 三角形.

【答案】 等腰直角

【解析】 $\because x^2 + 2(a-b)x - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 0$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = [2(a-b)]^2 - 4 \times 1 \times [-(a^2 + b^2 - c^2)^2]$$

$$= 4(a-b)^2 + 4(a^2 + b^2 - c^2)^2$$

$$= 0,$$

$$\therefore a-b=0, a^2+b^2-c^2=0,$$

$$\therefore a=b, a^2+b^2=c^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

【标注】【知识点】与等腰三角形结合

16. 2017~2018学年浙江台州椒江区书生中学初三上学期期中第18题8分 ★★★

已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2k+1)x + k^2 + k = 0$.

(1) 求证：方程有两个不相等的实数根 .

(2) 若 $\triangle ABC$ 的两边 AB 、 AC 的长是这个方程的两个实数根，第三边 BC 的长为 5 . 当 $\triangle ABC$ 是等腰三角形时，求 k 的值 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) k 的值为 4 或 5 .

【解析】 (1) $\Delta = [-(2k+1)]^2 - 4 \times 1 \times (k^2 + k) = 1$.

(2) $x^2 - (2k+1)x + k^2 + k = 0 \Rightarrow (x-k)[x-(k+1)] = 0$,

所以次方程的两个实数根为 $x_1 = k$, $x_2 = k+1$, 则可设 $AB = k$, $AC = k+1$.

① 若 BC 为底，则 $AB = AC$, 即 $k = k+1$, 此种情况无解；

② 若 AC 为底，则 $AB = BC$, 即 $k = 5$;

③ 若 AB 为底，则 $AC = BC$, 即 $k+1 = 5$, 则 $k = 4$.

综上所述， k 的值为 4 或 5 .

【标注】 【知识点】与等腰三角形结合

独步天下

17. 2020~2021 学年江苏泰州姜堰市初三上学期期中第 15 题 3 分 ★★

若关于 x 的一元二次方程 $2ax^2 - (a+4)x + 2 = 0$ 有一个正整数解，则正整数 $a =$ _____ .

【答案】 1 或 2

【解析】 根据题意得 $a \neq 0$, $\Delta = (a+4)^2 - 16a = (a-4)^2$,

$$\therefore x = \frac{a+4 \pm \sqrt{(a+4)^2 - 16a}}{4a} = \frac{a+4 \pm (a-4)}{4a} ,$$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{2} , x_2 = \frac{2}{a} ,$$

$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $2ax^2 - (a+4)x + 2 = 0$ 有一个整数根，而 a 为正整数，

$\therefore x_1 = \frac{1}{2}$ 不符合题意， $x_2 = \frac{2}{a}$ 必为整数，

$\therefore a = 1$ 或 2 .

故答案为：1 或 2 .

【标注】 【知识点】整数根-分离常数法

18. 2020~2021 学年 10 月江苏苏州工业园区西安交通大学苏州附属初级中学初三上学期月考第 10 题 3 分

★★★

已知关于 x 的方程 $(a-1)x^2 + 2x - a - 1 = 0$ 的根都是整数，那么符合条件的整数 a 有 () 个 .

A. 6

B. 5

C. 4

D. 3

【答案】 B**【解析】** ①当 $a = 1$ 时, $x = 1$;②当 $a \neq 1$ 时, 原式可以整理为: $[(a-1)x + a + 1](x-1) = 0$,易知 $x = 1$ 是方程的一个整数根,再由 $(a-1)x + a + 1 = 0$, 得出 $x = -1 - \frac{2}{a-1}$, x 是整数, $a-1 = \pm 1$ 或 ± 2 , $\therefore a = -1, 0, 2, 3$;由①、②得符合条件的整数 a 有 $-1, 0, 1, 2, 3$, 共 5 个.

故答案为: B.

【标注】【知识点】整数根-分离常数法

19. 2019~2020学年山东淄博张店区淄博市第十一中学初三下学期期末第22题10分 ★★★

已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + (2+2a)x + a + 2 = 0 (a \neq 0)$.

(1) 求证: 此方程总有两个不相等的实数根.

(2) 若此方程的两个根都为整数, 求整数 a 的值.**【答案】** (1) 证明见解析.(2) $a = \pm 1$ 或 $a = \pm 2$.**【解析】** (1) $\Delta = (2+2a)^2 - 4a(a+2) = 4 + 8a + 4a^2 - 4a^2 - 8a = 4$. $\therefore \Delta = 4 > 0$, $\therefore$ 方程有两个不相等的实数根.(2) $\therefore ax^2 + (2+2a)x + a + 2 = (x+1)(ax+a+2) = 0$, $\therefore x_1 = -1, x_2 = -\frac{a+2}{a} = -1 - \frac{2}{a}$. $\therefore$ 方程的根均为整数, $\therefore a = \pm 1$ 或 $a = \pm 2$.**【标注】**【知识点】整数根-分离常数法

20. 2019~2020学年安徽合肥蜀山区合肥市第五十中学新区初二下学期期中第19题8分 ★★

已知关于 x 的方程 $mx^2 - 2x + 2 - m = 0 (m \neq 0)$.(1) 证明: 不论 m 为何值时, 方程总有实数根.(2) 当 m 为何整数时, 方程有两个不相等的非负整数根.

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 2 .

【解析】(1) $\Delta = (-2)^2 - 4m(2-m) = 4m^2 - 8m + 4 = 4(m-1)^2 \geq 0$ 恒成立 ,

$\therefore$ 不论 m 为何值时 , 关于 x 的二次方程总有实数根 .

(2) 由题意得 , $m \neq 0$,

由 $mx^2 - 2x + 2 - m = 0$ 得 $(x-1)[mx - (2-m)] = 0$,

$\therefore x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2-m}{m} = \frac{2}{m} - 1$.

$\therefore$ 方程有两个不相等的非负整数根 ,

$\therefore \frac{2}{m} - 1$ 为非负整数且 $\frac{2}{m} - 1 \neq 1$,

$\therefore \frac{2}{m} - 1 \geq 0$ 且 $m \neq 1$,

$\therefore \frac{2}{m} \geq 1$ 且 $m \neq 1$,

$\therefore 0 < m \leq 2$ 且 $m \neq 1$,

又 $\frac{2}{m} - 1$ 为整数 , m 为整数 ,

$\therefore m = 2$.

【标注】【知识点】整数根-分离常数法

二、一元二次方程的根系关系

练习

21. 2020~2021学年广东广州荔湾区广州市西关外国语学校初三下学期开学考试第2题3分 ★

设方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的两根分别是 x_1 , x_2 , 则 $x_1 + x_2$ 的值为 () .

A. 3

B. $-\frac{3}{2}$

C. $\frac{3}{2}$

D. -2

【答案】A

【解析】根据韦达定理知 : $x_1 + x_2 = 3$.

故选 A .

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

22. 2020~2021学年10月天津和平区天津市第二十一中学初三上学期月考第16题3分 ★★

若 x_1 , x_2 是一元二次方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两个实数根 , 则 $x_1 + x_2 - x_1x_2 =$ _____ .

【答案】4

【解析】 $\because x_1, x_2$ 是一元二次方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两个实数根，

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$\therefore x_1 + x_2 - x_1 x_2 = 3 - (-1) = 4.$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

23. 2020~2021学年10月天津河北区天津市汇森中学初三上学期月考第14题 ★★

设 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 - mx + m - 1 = 0$ 的两个根，且 $x_1 + x_2 = 4$ ， $x_1 x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 3

【解析】 $\because x_1$ 和 x_2 是一元二次方程 $x^2 - mx + m - 1 = 0$ 的两根，

$$\text{且 } x_1 + x_2 = 4,$$

$$\therefore -\frac{b}{a} = -\frac{-m}{1} = 4, \text{ 即 } m = 4,$$

$$\therefore x^2 - 4x + 3 = 0.$$

$$\therefore x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 3.$$

故答案为：3 .

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

24. 2019~2020学年山东淄博张店区张店区第八中学初三下学期期中模拟第10题4分 ★★

已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + mx + 3 = 0$ 有两个实数根 $x_1 = 1$ ， $x_2 = n$ ，则代数式 $(m + n)^{2020}$ 的值为 () .

A. 0

B. 1

C. 3^{2020}

D. 7^{2020}

【答案】 B

【解析】 $\because x_1 = 1, x_2 = n$ 是 $x^2 + mx + 3 = 0$ 的两个实数根，

$$\therefore \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 3 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -m \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} 1 \cdot n = 3 \\ 1 + n = -m \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m = -4 \\ n = 3 \end{cases},$$

$$\therefore (m + n)^{2020} = (-4 + 3)^{2020}$$

$$= (-1)^{2020}$$

$$= 1.$$

故选 B .

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

25. 2019~2020学年9月天津和平区天津市汇文中学初三上学期月考第6题3分 ★★

关于 x 的一元二次方程 $x^2 + kx + 4k^2 - 3 = 0$ 的两个实数根分别是 x_1 , x_2 , 且满足 $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$, 则 k 的值为 ().

A. -1

B. $\frac{3}{4}$

C. -1或 $\frac{3}{4}$

D. 不存在

【答案】B

【解析】 $\because$ 一元二次方程 $x^2 + kx + 4k^2 - 3 = 0$ 的两实根为 x_1 , x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = -k, x_1 x_2 = 4k^2 - 3,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = x_1 x_2,$$

$$\therefore -k = 4k^2 - 3,$$

$$\text{解得 } k = \frac{3}{4} \text{ 或 } -1,$$

$\because$ 方程有两个实根,

$$\therefore \Delta = k^2 - 4(4k^2 - 3) \geq 0,$$

$$\therefore k^2 \leq \frac{4}{5},$$

$\therefore k = -1$ 不符合题意, 舍去,

$$\therefore k = \frac{3}{4},$$

故选: B.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

26. 2019~2020学年9月天津东丽区北大附中天津东丽湖学校初三上学期月考第18题 ★★★

关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x - 2m + 1 = 0$ 的两实数根之积为负, 则 m 的取值范围 ____.

【答案】 $m > \frac{1}{2}$

【解析】设 x_1 、 x_2 为方程 $x^2 + 2x - 2m + 1 = 0$ 的两个实数根,

$$\text{由已知得: } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} 8m \geq 0 \\ -2m + 1 < 0 \end{cases}.$$

$$\text{解得: } m > \frac{1}{2}.$$

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

27. 2017~2018学年广东广州海珠区初三上学期期末第13题3分 ★

已知方程 $x^2 + mx + 2 = 0$ 的一个根是 1，则它的另一个根是 _____ .

【答案】 2

【解析】 $\because x_1 \cdot x_2 = 2, x_1 = 1,$

$\therefore x_2 = 2.$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

28. 2015~2016学年广东广州天河区广州市第一一三中学初三上学期期中第20题10分 ★★

已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx + 12 = 0$ 的一根为 $x = -3$ ，求 m 的值以及方程的另一根 .

【答案】 $m = -7$ ，另一根 $x = -4$.

【解析】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx + 12 = 0$ 的一根为 $x = -3$ ，

$\therefore (-3)^2 - (-3)m + 12 = 0$ ，即 $9 + 3m + 12 = 0$ ，

$3m = -21$ ， $m = -7$ ，

$\therefore$ 原方程为 $x^2 + 7x + 12 = 0$ ，

由韦达定理可知 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ，

$\therefore -3 + x = -\frac{7}{1}$ ，即 $x = -4$.

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

29. 2018~2019学年广东广州天河区初三上学期期末第6题3分 ★★

一元二次方程 $x^2 + mx + n = 0$ 的两根为 -1 和 3，则 m 的值是 () .

A. -3

B. 3

C. -2

D. 2

【答案】 C

【解析】 根据题意得 $-1 + 3 = -m$ ，

所以 $m = -2$.

故选：C .

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

练习

30. 2017~2018学年天津滨海新区天津经济技术开发区国际学校初三上学期期末第13题3分 ★★

已知 α, β 是方程 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的两个实数根, 则 $\alpha^2 + \alpha\beta + 2\alpha$ 的值为 _____ .

【答案】 0

【解析】 $\alpha^2 + 2\alpha - 5 = 0$, $\alpha\beta = -5$, 即 $\alpha^2 + 2\alpha = 5$, $\alpha\beta = -5$,
原式 $= (\alpha^2 + 2\alpha) + \alpha\beta = 5 + (-5) = 0$.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

31. 2017年天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初三毕业考试第5题3分 ★★

若 a, b 是方程 $x^2 + 2x - 2006 = 0$ 的两根, 则 $a^2 + 3a + b = ()$.

A. 2006

B. 2005

C. 2004

D. 2002

【答案】 C

【解析】 $\because a, b$ 是方程 $x^2 + 2x - 2006 = 0$ 的两根,
 $\therefore x^2 + 2x = 2006$, $a + b = -2$
则 $a^2 + 3a + b$
 $= a^2 + 2a + a + b$
 $= 2006 - 2$
 $= 2004$
故选: C.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

32. 2017~2018学年10月江苏苏州工业园区苏州星海实验中学初三上学期月考第8题3分 ★★★

设 a, b 是方程 $x^2 + 2016x + 1 = 0$ 的两个实数根, 则 $(1 + 2016a + a^2)(1 + 2016b + b^2)$ 的值为 () .

A. 2017

B. 4

C. 2016

D. -4

【答案】 B

【解析】 $\because a, b$ 是方程 $x^2 + 2016x + 1 = 0$ 的两个实数根, 则代入可得:
 $a^2 + 2016a + 1 = 0$, $b^2 + 2016b + 1 = 0$,
原式 $= (1 + 2016a + a^2)(1 + 2016b + b^2)$
 $= (a^2 + 2016a + 1 + 2a)(b^2 + 2016b + 1 + 2b)$
 $= (0 + 2a)(0 + 2b)$
 $= 4ab$,
由韦达定理可知, $x_1 \cdot x_2 = a \cdot b = \frac{1}{1} = 1$,

$\therefore 4ab = 4$, 即原式 $= 4$.

故选 B .

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

33. 2017~2018学年10月天津和平区天津市益中学校初三上学期月考第15题3分 ★★★

设 x_1 , x_2 是一元二次方程 $x^2 + 4x - 3 = 0$ 的两根 , 且 $2x_1(x_2^2 + 5x_2 - 3) + a = 2$, 则 $a =$ _____ .

【答案】 8

【解析】 根据题意得 $x_1 + x_2 = -4$, $x_1x_2 = -3$,
所以原式化简得 $-6(x_1 + x_2) + 10x_1x_2 + a = 2$,
代入可得 $a = 8$.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

34. 2020年四川成都天府新区天府七中初三中考一模第21题4分 ★★★

若 a 、 b 是一元二次方程 $x^2 - x - 2016 = 0$ 的两根 , 则 $a^3 + 2017b - 2016 =$ _____ .

【答案】 2017

【解析】 $\because a$ 是 $x^2 - x - 2016 = 0$ 的实数根 ,
 $\therefore a^2 = a + 2016$,
 $\therefore a^3 = a^2 + 2016a = a + 2016 + 2016a = 2017a + 2016$,
 $\therefore$ 原式 $= 2017(a + b)$,
 $\because a$, b 是 $x^2 - x - 2016 = 0$ 的两个实数根 ,
 $\therefore a + b = 1$,
 $\therefore$ 原式 $= 2017$.

【标注】【知识点】利用根求代数式的值

 练习

35. 2019~2020学年3月天津南开区天津市南开翔宇学校初二下学期月考第11题3分 ★★

若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 7x + 4 = 0$ 的两根是 x_1 、 x_2 , 则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值为 () .

- A. $-\frac{7}{4}$ B. $\frac{7}{4}$ C. $\frac{-7 + \sqrt{33}}{2}$ D. $\frac{-7 - \sqrt{33}}{2}$

【答案】 A

【解析】 $\because x^2 + 7x + 4 = 0$ 的两根是 x_1, x_2 ,

$$\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = -7 \\ x_1 \cdot x_2 = 4 \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \\ &= \frac{-7}{4} \\ &= -\frac{7}{4}. \end{aligned}$$

故选 A.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

36. 2019~2020学年天津东丽区天津市东丽中学初三上学期期中第6题3分 ★★

若 α, β 是方程 $x^2 - 2x - 2 = 0$ 的两个实数根, 则 $\alpha^2 + \beta^2$ 的值为 ().

A. 10

B. 9

C. 8

D. 7

【答案】C

【解析】根据题意得 $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -2$,

$$\text{所以 } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2^2 - 2 \times (-2) = 8.$$

故选 C.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

37. 2016~2017学年天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初三上学期期末第1题3分 ★

设关于 x 的方程 $2x^2 + kx + 2 = 0$ 的两根分别为 α, β , 且 $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$, 则 k 等于 ().

A. 2

B. -4

C. 4

D. -2

【答案】B

【解析】 $2x^2 + kx + 2 = 0$,

$$\alpha + \beta = -\frac{k}{2},$$

$$\alpha\beta = \frac{2}{2} = 1,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta},$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta},$$

$$\frac{k^2}{4} - 2 = -\frac{k}{2},$$

$$k^2 + 2k - 8 = 0,$$

$$k_1 = 2, k_2 = -4,$$

$$\Delta = k^2 - 4 \times 2 \times 2 \geq 0 ,$$

$$k^2 \geq 16 ,$$

$$k = -4 .$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

38. 2015年天津河北区初三中考三模第14题3分 ★★

已知 a, b 是方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的两个根，则代数式 $|a - b|$ 的值为 _____ .

【答案】 3

【解析】根据题意得 $a + b = 1, ab = -2$,

$$\text{所以 } |a - b| = \sqrt{(a - b)^2} = \sqrt{(a + b)^2 - 4ab} = \sqrt{1 - 4 \times (-2)} = 3 .$$

故答案为 3 .

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

39. ★★

已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两个实数根 .

则 :

(1) $x_1^2 + x_2^2 =$ _____ .

(2) $x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 =$ _____ .

(3) $x_1 - x_2 =$ _____ .

(4) $x_1^2 - x_2^2 =$ _____ .

(5) $(x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) =$ _____ .

(6) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} =$ _____ .

(7) $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} =$ _____ .

(8) $\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} =$ _____ .

(9) $\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} + \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} =$ _____ .

【答案】 (1) 7

(2) 8

(3) $\pm\sqrt{5}$

(4) $\pm 3\sqrt{5}$

(5) -1

(6) 7

$$(7) \pm\sqrt{5}$$

$$(8) \pm 3\sqrt{5}$$

$$(9) 3$$

【解析】(1) 易知 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$,

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \\ &= 7. \end{aligned}$$

(2) 易知 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$,

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 \\ &= 8. \end{aligned}$$

(3) 易知 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$,

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_2)^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \\ &= 5, \end{aligned}$$

则 $x_1 - x_2 = \pm\sqrt{5}$.

(4) 易知 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$,

$$\begin{aligned} & x_1^2 - x_2^2 \\ &= (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) \\ &= \pm 3\sqrt{5}. \end{aligned}$$

(5) 易知 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$,

$$\begin{aligned} & (x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) \\ &= x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \\ &= -1. \end{aligned}$$

(6) 易知 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$,

$$\begin{aligned} & \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} \\ &= \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} - 2 \\ &= 7. \end{aligned}$$

(7) 易知 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \\ &= \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \\ &= \pm\sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \text{ 易知 } & \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}, \\
 & \frac{\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1^2}{x_1^2 x_2} - \frac{x_2^2}{x_1 x_2^2}} \\
 &= \frac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2)(x_2 - x_1)} \\
 &= \frac{x_1 x_2}{x_1 x_2} \\
 &= \pm 3\sqrt{5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (9) \text{ 易知 } & \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}, \\
 & \left(\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} + \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} \right)^2 \\
 &= \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + 2 \\
 &= 9, \\
 \text{则 } & \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} + \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} = 3.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

40. 2019~2020学年10月江西南昌西湖区南昌市育新学校初三上学期月考第17题6分 ★★

已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (m-3)x - m = 0$,

(1) 求证：方程有两个不相等的实数根.

(2) 如果方程的两实根为 x_1 、 x_2 ，且 $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 7$ ，求 m 的值.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 1, 2.

【解析】(1) $\because \Delta = m^2 - 2m + 9 = (m-1)^2 + 8 > 0$,

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根.

(2) $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 7$ 变形可得 $(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 7$,

利用韦达定理代入可求得 $m_1 = 1$, $m_2 = 2$.

故答案为：1, 2.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

41. 2018~2019学年10月天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初三上学期月考第19题9分 ★★★

已知关于 x 的方程 $x^2 - 2(k-1)x + k^2 = 0$ 有两个实数根 x_1 , x_2 .

(1) 求实数 k 的取值范围.

(2) 若 $|x_1 + x_2| = x_1 \cdot x_2 - 1$ ，求实数 k 的值.

【答案】(1) $k \leq \frac{1}{2}$.

(2) -3 .

【解析】(1) 由方程有两个实数根, 可得:

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\&= 4(k-1)^2 - 4k^2 \\&= 4k^2 - 8k + 4 - 4k^2 \\&= -8k + 4 \geq 0, \\ \text{解得: } k &\leq \frac{1}{2}, \\ \therefore k \text{ 的取值范围是 } k &\leq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(2) 依据题意可得, $x_1 + x_2 = 2(k-1)$, $x_1 x_2 = k^2$,
有 (1) 可知 $k \leq \frac{1}{2}$,
 $\therefore 2(k-1) < 0$, $x_1 + x_2 < 0$,
 $\therefore -x_1 - x_2 = -(x_1 + x_2) = x_1 + x_1 - 1$,
 $\therefore -2(k-1) = k^2 - 1$,
解得 $k_1 = 1$ (舍去), $k_2 = -3$.
 $\therefore k$ 的值是 -3 .

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

42. 2018~2019学年广东广州越秀区广州大学附属中学初三上学期开学考试第16题3分 ★★★

若关于 x 的方程 $x^2 + 2mx + m^2 + 3m - 2 = 0$ 有两个实数根 x_1 、 x_2 , 则 $x_1(x_2 + x_1) + x_2^2$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $\frac{5}{4}$

【解析】关于 x 的方程 $x^2 + 2mx + m^2 + 3m - 2 = 0$ 有两个实数根 x_1 、 x_2 ,

$$\Delta = 4m^2 - 4(m^2 + 3m - 2) \geq 0, \text{ 解得 } m \leq \frac{2}{3}$$

由韦达定理可知 $x_1 + x_2 = -2m$, $x_1 \cdot x_2 = m^2 + 3m - 2$.

$$\begin{aligned}&x_1(x_2 + x_1) + x_2^2 \\&= x_1 x_2 + x_1^2 + x_2^2 \\&= (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 \\&= (-2m)^2 - m^2 - 3m + 2 \\&= 3m^2 - 3m + 2 \\&= 3\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} . \\ \therefore m &\leq \frac{2}{3}, \\ \therefore \text{当 } m &= \frac{1}{2} \text{ 时, 取得最小值为 } \frac{5}{4} .\end{aligned}$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

43. ★★

已知 α, β 是一元二次方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的两个根, 则 $2\alpha^5 + 5\beta^3$ 的值为 _____ .

【答案】 -21

【解析】 $\because \alpha$ 是方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的根,

$$\therefore \alpha^2 + \alpha - 1 = 0, \text{ 即 } \alpha^2 = 1 - \alpha.$$

$$\alpha^4 = (1 - \alpha)^2 = 1 - 2\alpha + \alpha^2 = 2 - 3\alpha,$$

$$\alpha^5 = \alpha^4 \cdot \alpha = (2 - 3\alpha)\alpha = 2\alpha - 3\alpha^2 = 5\alpha - 3.$$

$$\text{同理 } \beta^3 = \beta^2 \cdot \beta = (1 - \beta)\beta = \beta - \beta^2 = 2\beta - 1.$$

$$\therefore 2\alpha^5 + 5\beta^3 = 2(5\alpha - 3) + 5(2\beta - 1) = 10(\alpha + \beta) - 11 = -21.$$

故答案为: -21.

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

练习

44. ★★★

设实数 a, b 满足 $3a^2 - 19a + 1 = 0$ 且 $3b^2 + 19b + 1 = 0$, 求 $a + b$ 的值.

【答案】 $\pm \frac{\sqrt{349}}{3}$.

【解析】 $\because 3(-b)^2 - 19(-b) + 1 = 0$,

$$\therefore a, -b \text{ 是 } 3x^2 - 19x + 1 = 0 \text{ 的根},$$

$$\textcircled{1} a = -b \Rightarrow a + b = 0;$$

$$\textcircled{2} a \neq -b,$$

由韦达定理得

$$\begin{cases} a + (-b) = \frac{19}{3}, \\ a \cdot (-b) = \frac{1}{3} \end{cases},$$

$$\therefore (a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab = \left(\frac{19}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} = \frac{349}{9},$$

$$\therefore a + b = \pm \frac{\sqrt{349}}{3}.$$

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

45. 2016年四川成都青羊区树德中学自主招生第1题5分 ★★

已知 a 、 b 满足 $a^2 - 2a - 5 = 0$ ， $b^2 - 2b - 5 = 0$ ，且 $a \neq b$ ，则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 3$ 的值是 () .

A. $\frac{1}{5}$ B. $-\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $-\frac{2}{5}$

【答案】 A

【解析】 $\because a$ 、 b 满足 $a^2 - 2a - 5 = 0$ ， $b^2 - 2b - 5 = 0$ ，且 $a \neq b$ ，

$\therefore a$ 、 b 可以看作方程 $x^2 - 2x - 5 = 0$ 的两个根，

$\therefore a + b = 2$ ， $ab = -5$ ，

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 3 = \frac{b^2 + a^2}{ab} + 3 = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} + 3 = \frac{2^2 + 10}{-5} + 3 = \frac{1}{5}.$$

故选 A .

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

46. ★★

若实数 a 、 b 满足 $a^2 + 3a = 2$ ， $b^2 + 3b = 2$ ，且 $a \neq b$ ，则 $(1 + a^2)(1 + b^2) =$ () .

A. 18 B. 12 C. 9 D. 6

【答案】 A

【解析】 依题意， a 、 b 为方程 $x^2 + 3x - 2 = 0$ 的两个不同实根 .

因此，由韦达定理，得 $a + b = -3$ ， $ab = -2$.

$$\begin{aligned} (1 + a^2)(1 + b^2) &= (1 + 2 - 3a)(1 + 2 - 3b) = 9(1 - a)(1 - b) \\ &= 9[1 - (a + b) + ab] = 9 \times (1 + 3 - 2) = 18. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

47. 2017~2018 学年安徽芜湖初三上学期期末第 17 题 4 分 ★★

如果实数 $a \neq b$ 满足 $(a + 1)^2 = 3 - 3(a + 1)$ ， $3(b + 1) = 3 - (b + 1)^2$ ，那么 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 的值为 _____ .

【答案】 23

【解析】 设 $(a + 1)$ 、 $(b + 1)$ 是方程 $x^2 + 3x - 3 = 0$ 的两个根，

$\therefore (a + 1) + (b + 1) = -3$ ， $(a + 1)(b + 1) = -3$ ，

$\therefore a + b = -5$ ， $ab = 1$.

$$\begin{aligned} \therefore \text{原式} &= \frac{a^2 + b^2}{ab} \\ &= \frac{(a + b)^2 - 2ab}{ab} \\ &= 23. \end{aligned}$$

故答案为：23 .

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

48. ★★★

若两个不等实数 m, n 满足 $m^2 - 2m = a, n^2 - 2n = a, m^2 + n^2 = 5$, 则 $m - n$ 的值为 _____ .

【答案】 $\pm\sqrt{6}$

【解析】 略 .

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

49. ★★★

已知 $a \neq b$, 且 $a^2 - 13a + 1 = 0, b^2 - 13b + 1 = 0$, 那么 $\frac{b}{1+b} + \frac{a^2+a}{a^2+2a+1} =$ _____ .

【答案】 1

【解析】 由题意得 a, b 是 $x^2 - 13x + 1 = 0$ 的两根 , 那么 $a + b = 13, ab = 1$.

$$\therefore \text{原式} = \frac{b}{1+b} + \frac{a(a+1)}{(a+1)^2} = \frac{b}{1+b} + \frac{a}{a+1} = \frac{2ab + (a+b)}{(a+b) + 1 + ab} = 1 .$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

50. ★★★

若 $ab \neq 1$, 且有 $3a^2 + 123456789a + 2 = 0, 2b^2 + 123456789b + 3 = 0$, 则 $\frac{a}{b}$ 的值为 _____ .

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】 显然 a 和 $\frac{1}{b}$ 是方程 $3x^2 + 123456789x + 2 = 0$ 的个不同实根 , 故 $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$.

故答案为： $\frac{2}{3}$.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

51. ★★★

若 $ab \neq 1$, 且 $5a^2 + 2001a + 9 = 0, 9b^2 + 2001b + 5 = 0$, 则 $\frac{ab+a+1}{b} =$ _____ . (填小数形式)

【答案】 -398.4

【解析】 由 $9b^2 + 2001b + 5 = 0$ 得 , $5\frac{1}{b^2} + 2001\frac{1}{b} + 9 = 0$, 又 $5a^2 + 2001a + 9 = 0$,

所以 $a, \frac{1}{b}$ 可以看作是方程 $5x^2 + 2001x + 9 = 0$ 的两个根 .

由韦达定理 , 得 : $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} = \frac{9}{5}$, $a + \frac{1}{b} = -\frac{2001}{5}$;

故 $\frac{ab+a+1}{b} = -\frac{1992}{5} = -398.4$.

故答案为 : -398.4 .

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

52. ★★

设 a, b, c, d 为互不相等的正实数 , 且 $(a^2 - c^2)(a^2 - d^2) = 1$, $(b^2 - c^2)(b^2 - d^2) = 1$, 则 $a^2b^2 - c^2d^2 = ()$.

A. 0

B. -1

C. 1

D. 无法确定

【答案】 B

【解析】 a^2, b^2 是方程 $(x - c^2)(x - d^2) = 1$ 的两个根 ,

展开得 $x^2 - (c^2 + d^2)x + c^2d^2 - 1 = 0$.

由根与系数的关系得 $a^2b^2 = c^2d^2 - 1$. 故 $a^2b^2 - c^2d^2 = -1$,

选 B .

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

独步天下

53. ★★★

已知 x, y 是正整数 , 并且 $xy + x + y = 23$, $x^2y + xy^2 = 120$, 求 $x^2 + y^2$ 的值 .

【答案】 34 .

【解析】 方法一 : 由于 $xy + (x + y) = 23$, $xy \cdot (x + y) = 120$,

则 xy 与 $(x + y)$ 为方程 $t^2 - 23t + 120 = 0$ 的两个根 , 得到 $t_1 = 8$, $t_2 = 15$

即 $xy = 8$, $x + y = 15$ ① ;

或者 $xy = 15$, $x + y = 8$ ② ;

①的时候 x, y 为方程 $u^2 - 15u + 8 = 0$ 的根 , $\Delta_1 = 15^2 - 32 = 193$, 不是完全平方数 , x, y 不可能为题目中要求的正整数 , 舍 ;

②的时候 xy 为方程 $u^2 - 8u + 15 = 0$ 的根 , $u_1 = 3$, $u_2 = 5$.

故 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 34$.

方法二 : 令 $x + y = s$, $xy = t$.

则 $s + t = 23$, $st = 120$.

故可得 s, t 为方程 $x^2 - 23x + 120 = 0$ 的两根，
 故可得： $s = 8, t = 15$ 或 $s = 15, t = 8$ (舍去)。
 则： $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = s^2 - 2t = 34$ 。

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

54. 2018年浙江宁波自主招生效实中学三位一体第19题7分 ★★★

已知 x, y 都是实数， $x + y + xy = 4$ ， $xy^2 + yx^2 = 3$ ，求 $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 55

【解析】 由题意知， $xy, x + y$ 是方程 $t^2 - 4t + 3 = 0$ 的两根，

$$\text{解得 } \begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}, \begin{cases} xy = 3 \\ x + y = 1 \end{cases},$$

当 $\begin{cases} xy = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$ 时构造方程 $m^2 - m + 3 = 0$ 无解，舍去，

$$\therefore \begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 3 \end{cases},$$

$$\text{原式} = x^3(x + y) + x^2y^2 + y^3(x + y)$$

$$= (x^3 + y^3)(x + y) + x^2y^2$$

$$= 3(x + y)(x^2 - xy + y^2) + 1$$

$$= 9[(x + y)^2 - 3xy] + 1$$

$$= 55.$$

故答案为 55。

【标注】【知识点】利用构造的方程求解